

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Prof.ssa Katia Comandi

Dispensa per le classi I°A e I°E Liceo Scientifico

a.s 2006/2007

Indice

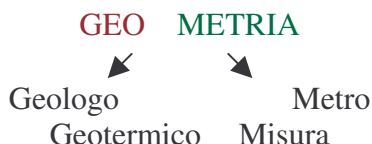
Introduzione alla Geometria Euclidea

1	Introduzione	pag. 3
2	La Geometria attraverso la storia	pag. 3
3	Dalla Logica: il Metodo Assiomatico	pag. 6
4	La Geometria del piano secondo Euclide	pag. 8
5	Gli “Elementi” di Euclide	pag. 12
6	Geometrie non euclidee	pag. 14
7	Compendio di Geometria piana	pag. 18

Introduzione alla Geometria Euclidea

1 Introduzione

Possiamo riflettere sulla etimologia della parola “geometria”: se scomponiamo la parola troviamo il suo significato



GEO: viene dalla Terra

METRIA: viene da misura, misurare

Allora la parola GEOMETRIA significa misurare, ottenere una misura della Terra, quindi del mondo. Quindi la Geometria non è altro che quella disciplina che offre gli strumenti per avere una qualche idea sulle misure degli oggetti che ci circondano.

Già alle scuole medie hai imparato ad ottenere, in geometria, la misura degli oggetti che hanno una certa forma (quadrato, rombo, triangolo, cubo, cilindro, cono, ecc...) e per fare questo hai imparato a riconoscere le proprietà di tali figure.

Per ottenere la misura della superficie o del volume di una figura solida o tridimensionale è necessario però conoscere le misure delle sue componenti “piane” (es. del cubo è bene conoscere la misura dei suoi lati).

Quindi per studiare il mondo (spazio tridimensionale) che ci circonda è prima necessario avere una idea delle proprietà degli oggetti del piano (spazio bidimensionale).

La Geometria piana si occupa appunto dello studio delle proprietà e della ricerca della misura per le superfici piane.

2 La Geometria attraverso la storia

Una delle civiltà più antiche che ha usato e sviluppato la geometria è quella **egiziana**:

- ⇒ le origini di questa civiltà sono sconosciute, ma sappiamo certamente che esisteva già prima del 4000 a.C.
- ⇒ il periodo di maggior splendore della cultura egiziana si ha intorno al 2500 a.C., quando cioè i faraoni costruiscono le piramidi.
- ⇒ al 1700 a.C. risalgono i più importanti documenti di carattere matematico; uno di questi è il papiro di Ahmes, dal nome del suo autore, che lo inizia con le parole “*Regole per ottenere la conoscenza di tutte le cose oscure*”. In questo papiro ci sono 85 problemi con le relative soluzioni, tra questi problemi ce ne sono alcuni di tipo geometrico ma, siccome gli egiziani non separavano l’aritmetica dalla geometria, questi sono risolti per via aritmetica, infatti gli Egiziani avevano delle “ricette” per determinare le aree di triangoli, rettangoli, ecc... (il loro

calcolo dell’area del cerchio seguiva la formula $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ dove d è il diametro, questa

formula fornisce lo stesso risultato della nostra, $A = \pi r^2$, ma con il valore approssimato di π pari a 3.1605, quando invece π è un numero decimale non periodico con infinite cifre decimali). Dai documenti che ci hanno lasciato si pensa che la geometria egiziana ebbe origine dalla necessità di rideterminare annualmente i confini dei campi cancellati dallo straripamento del Nilo. E comunque i problemi riportati nei vari documenti si pensa che dovevano essere risolti dagli uomini di affari e dagli impiegati amministrativi e i metodi di soluzione erano soltanto regole pratiche ricavate dall’esperienza del lavoro di tutti i giorni.

⇒ La civiltà egiziana continuò la sua strada fino a quando Alessandro Magno conquistò l'Egitto nel 332 a.C.

Dopo tale data e fino al 600 d.C. la sua storia e la sua matematica fanno parte della **civiltà greca**:

- ⇒ si presume che la civiltà greca risalga al 2800 a.C.
- ⇒ non appena raggiunta una certa stabilità interna, i Greci cominciarono a visitare l'Egitto e la Mesopotamia, ed è per questo motivo che negli scritti greci dell'epoca classica vi sono molti riferimenti alla conoscenza degli Egiziani.
- ⇒ la civiltà greca antica è durata fino al 600 d.C., ma i maggiori contributi dal punto di vista matematico risalgono al periodo classico, che va dal 600 al 300 a.C. E' in questo periodo che personaggi come **Pitagora** di Samo e **Talete** di Mileto ebbero la possibilità di recarsi presso quei popoli che erano allora i centri del sapere, gli Egiziani ed i Babilonesi.
- ⇒ la parte migliore dell'opera dei matematici del periodo classico è giunta fino a noi negli scritti di **Euclide** (300 a.C.) e di **Apollonio**. I libri di Euclide sono delle esposizioni di quanto era stato sviluppato in tale periodo. L'opera più famosa di Euclide sono gli **Elementi**, che è in effetti una riorganizzazione delle scoperte dei matematici greci del periodo classico.

Viene di seguito presentata una scheda su Pitagora, vista l'importanza del Teorema che prende il suo nome:

Pitagora



Busto di Pitagora, Musei Vaticani, Roma

Pitagora, nato a Samo intorno al 575 a.C. e morto nel Metaponto nel 490 a.C. è una figura mitica: fu matematico, scienziato e sciamano, legislatore e oligarca, taumaturgo e filosofo, anzi inventore dello stesso termine di filosofia, mago e oratore, liberatore di città e musicista, iniziatore della razionalità greca.

La consegna della regola del silenzio e del segreto, rispettata dalla scuola pitagorica sull'esempio delle sette orfiche, nonché la convinzione della superiorità della tradizione orale sulla scrittura (Pitagora non ha lasciato scritti) accrescono il mistero attorno a quello che viene considerato il "*padre dei numeri*".

Cenni biografici

Figlio di un mercante di Tiro, Pitagora nacque a Samo nel 570 a.C. Di famiglia sufficientemente agiata poté frequentare eccellenti maestri, i migliori cervelli del tempo: il musicista e poeta Ermodame, suo concittadino, gli scienziati Talete (ma appare poco credibile essendoci fra i due circa cinquant'anni di differenza) ed Anassimandro, entrambi di Mileto, e il filosofo moralista Biante di Priene.

A diciotto anni fu affidato a Ferecide di Siro detto il Saggio che lo indusse ad indagare sulle leggi palesi ed occulte dei fenomeni naturali. I due viaggiarono visitando le isole del mar Egeo e l'Asia Minore, venne iniziato ai sacri misteri dei templi greci. Quando nel 548 a.C. il suo maestro morì, compì dei viaggi in Egitto e in Babilonia, durante i quali frequentò circoli sacerdotali e magici, prima di stabilirsi definitivamente a Crotona, dove fondò la scuola che prese il suo nome. Le alterne vicende politiche lo costrinsero a riparare a Metaponto, dove morì nel 490 a.C. Ma anche sulla sua morte i resoconti dei biografi non coincidono: secondo alcuni, Pitagora, rientrato a Crotona, sarebbe vissuto fino all'età di cento anni.

Si narra che un giorno Leonte, tiranno di Fliunte, chiese a Pitagora «Chi sei?» e lui gli rispose: «Sono un filosofo» e fu così che per la prima volta è stato pronunciato questo termine.

Numeri e realtà

Pitagora sostenne che la natura ultima della realtà fosse matematica. Secondo Aristotele, i pitagorici sostenevano che *"il mondo intero fosse armonia e numero"*. Pitagora maturò la convinzione che le cose fossero numeri dallo studio della musica, della matematica e della astronomia. In particolare, da virtuoso della lira quale era, notò come gli accordi musicali fossero esprimibili in termini di rapporti tra numeri interi. Vide la stessa armonia riflessa nell'universo e non esitò a parlare di armonia generale del cosmo.

Contributi alla matematica

La chiarificazione della natura dei numeri si pose come domanda imprescindibile a Pitagora e ai suoi seguaci. Essi si interrogarono sulle proprietà dei numeri pari e dispari, dei numeri triangolari e dei numeri perfetti e lasciarono un'eredità duratura a coloro che si sarebbero occupati di matematica. A Pitagora, o ai pitagorici, si devono le seguenti scoperte:

- ❑ la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti. Più in generale, nel caso di un poligono di n lati la somma degli angoli interni è uguale a $2n-4$ angoli retti;
- ❑ una "dimostrazione" che in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti: il noto **teorema di Pitagora** era tuttavia conosciuto da babilonesi e indiani prima di Pitagora, e nei Sulvasutra si trova una dimostrazione uguale a quella di Euclide;
- ❑ la soluzione geometrica di alcune equazioni algebriche;
- ❑ la scoperta dei numeri irrazionali;
- ❑ la costruzione dei solidi regolari.

Concessioni al misticismo

Pitagora si appassionò di orfismo e misticismo e, in virtù di questi interessi, non esitò ad attribuire ai numeri poteri magici. Egli credeva nella metempsicosi, nella purificazione delle anime attraverso un ciclo di successive reincarnazioni (poiché riteneva il corpo una prigione dell'anima che si poteva purificare solamente attraverso la conoscenza). Sosteneva di aver vissuto quattro volte e, in particolare, di essere stato prima Etalide, poi Euforbo, nei cui panni era stato ferito a Troia da Menelao, quindi Ermotimo — a dimostrazione diceva di aver riconosciuto in un tempio lo scudo di Menelao e infine Pirro, un povero pescatore dell'isola di Delo. Tra una reincarnazione e l'altra, la sua anima si era trasferita in numerose specie animali e perfino in qualche pianta. Altre volte invece gli era capitato di scendere nell'Ade, dove aveva intravisto Omero appeso a un albero ed Esiodo incatenato a una colonna, colpevoli entrambi di aver trattato gli Dei con troppa familiarità. La serie delle apparizioni di Pitagora comunque non termina con lui: alcuni biografi posteriori raccontano che il filosofo si sia reincarnato di nuovo in un certo Periandro, quindi nel corpo di un uomo chiamato anch'egli Etalide e, per finire, nelle vesti profumate di Alco, una bellissima donna che di mestiere faceva la prostituta. Infatti pare che il ciclo delle reincarnazioni fosse di 216 anni (il 216 era uno dei numeri magici della scuola pitagorica, essendo il cubo del numero 6); per cui l'ultima apparizione sulla Terra dovrebbe essere avvenuta intorno al 1810 d.C.

Introdusse la *teoria dei contrari* (limite, illimitato - pari, dispari - uno, molteplice - destro, sinistro - maschio, femmina - fermo, mosso - diritto, curvo - buono, cattivo - luce, tenebra - quadrato, rettangolo).

La scuola pitagorica di Crotone

Il più grande riconoscimento che la storia conferisce a Crotone, è la prolifica scuola pitagorica che il grande maestro greco fondò in una data stimata fra il 600 a.C. e il 500 a.C. Secondo la leggenda il filosofo e matematico scelse questa meta per il suo ateneo per volere divino. Proveniva da Delphi laddove la leggenda racconta che avesse interpellato l'oracolo. Fu il Dio Apollo a predestinarlo a Crotone per trasmettere il suo sapere. Inoltre era a lui nota la cultura scientifico-medica, artistica e filosofica della città, e non ultimo il suo favorevole clima politico. Era infatti la tirannia a dilagare

nelle altre città ioniche. Giunto a Crotona, Pitagora riuscì a guadagnarsi subito i favori del popolo grazie al suo sapere. Ottenne dalla città una magnifica costruzione all'interno delle mura cittadine, in marmo bianco, circondato da giardini e portici, destinata ad ospitare la scuola del maestro. Fu chiamata *Casa delle Muse*. In questa scuola il maestro sviluppò il suo pensiero, fra cui ricordiamo: la metempsicosi, la teoria secondo cui l'anima vive anche dopo la morte corporea; la dottrina escatologica, conseguente alla metempsicosi, secondo cui l'anima trasmigra in forme di vita diverse, perfezionandosi, fino a raggiungere Dio; il dualismo, che riguarda il cosmo e l'aria che lo circonda; la teoria secondo cui il numero è il principio di tutte le cose; la costruzione dell'aritmetica in base 10 e il suo famoso teorema.

3 *Dalla Logica: il Metodo assiomatico*

Prima di esaminare nel dettaglio la Geometria dal punto di vista dei Greci è opportuno fare un richiamo di Logica.

Abbiamo visto che la deduzione fornisce risultati certi (veri) solo se le premesse sono certe (vere). Lo schema di un ragionamento deduttivo è infatti il seguente:

1. si presentano alcune affermazioni, dette **premesse**, la cui verità è già stata accettata (perché già dimostrata oppure perché le affermazioni fatte sono intuitivamente evidenti);
2. si *deduce* da queste la verità di una nuova affermazione, detta **conclusione**.

Ammessi di avere delle buone regole logiche per dedurre (Regole di deduzione), è necessario essere sicuri delle premesse. E' ovvio che anche queste a loro volta avranno dovuto essere dimostrate a partire da altre affermazioni precedenti..... e così via all'indietro (un po' come il bambino che chiede: perché così? e perché ...?).

Naturalmente non è possibile andare all'indietro all'infinito, quindi occorre trovare dei punti di partenza (abbiamo visto come Aristotele e sulla sua scia S. Tommaso d'Aquino, con un ragionamento a catena di questo tipo sulle cause, arrivarono a dimostrare l'esistenza di Dio!).

Allora si deve partire da qualcosa che non è dimostrato e che non è dimostrabile: di solito si tratta di qualcosa di estremamente ovvio, che nessuno andrebbe a contestare.

Questa è la scelta che fece Euclide nel suo testo di geometria scritto nel III secolo a.C. e che conserva tuttora la sua validità.

Tali affermazioni sono dette **postulati** o **assiomi** (*postulati in geometria, assiomi in altri ambiti della matematica*): questi quindi sono delle affermazioni la cui verità non ha bisogno di essere dimostrata in quanto risulta evidente.

Da un certo punto di vista possiamo considerare i postulati della geometria o gli assiomi di qualche teoria matematica un po' come le regole di un gioco: le regole di un gioco non sono vere o false, evidenti o meno, ma necessarie per iniziare a giocare: se le rispetti, giochi a quel gioco, se non le rispetti, vuol dire che non stai più giocando a quel gioco.

Esempio calcistico:

La regola del "fuorigioco" a calcio non è né vera né falsa, e neanche tanto evidente, anche se ha ovviamente una sua ragione di esistere, ma se non la rispetti non stai più giocando al gioco del calcio.

I risultati ottenuti dai postulati (assiomi) attraverso le regole di deduzione, sono detti **teoremi**. Le premesse si chiamano IPOTESI e la conclusione si chiama TESI.

Il Teorema

In matematica intendiamo con teorema una proposizione che deve essere dimostrata a partire da date premesse (postulati, assiomi o altri teoremi precedentemente dimostrati).

In un teorema le premesse costituiscono l'**Ipotesi (Hp.)** e la conclusione la **Tesi (Th.)**. Un teorema quindi è sempre composto da:

un'ipotesi	Dati del problema che possono essere forniti esplicitamente od implicitamente
una tesi	Quello che si vuole dimostrare
una dimostrazione	<i>Una catena di deduzioni ricavata ciascuna dalle precedenti secondo opportune leggi della logica e il cui valore di verità dipende da assiomi o da teoremi precedentemente dimostrati..</i>

In questo caso, astratto, le regole di deduzione fanno parte delle “regole del gioco” per passare dai postulati ai teoremi e dai teoremi a teoremi ulteriori.

Le **premesse** si spera siano vere, o meglio si danno per scontate, o perché sono già state dimostrate prima o perché sono estremamente ovvie.

Se poi le premesse non sono vere, abbiamo visto che da contraddizioni, ma anche da proposizioni false si riesce a dimostrare tutto e il contrario di tutto, il che non è di grande aiuto se si vuol concludere qualcosa di sensato.

Date premesse vere, si desidera **dimostrare la conclusione**. Dimostrare non significa presentare una affermazione vera, magari senza nesso logico con quanto precede, ma *si desidera che la conclusione discenda “logicamente” dalle premesse*.

Il che vuol dire che *l'insieme delle premesse deve implicare logicamente la conclusione*.

Osservazione

Come sapeva Pitagora che il suo teorema valeva per tutti i triangoli rettangoli? Egli non poteva certo sperare di misurare l'infinita varietà dei triangoli rettangoli e tuttavia poteva essere al cento per cento sicuro della verità assoluta del suo teorema. La ragione di questa fiducia sta nel **concetto di dimostrazione matematica**. La ricerca di una dimostrazione è la ricerca di una conoscenza che è più assoluta della conoscenza accumulata da ogni altra disciplina.

La differenza fra prova matematica e prova scientifica è sottile ma profonda ed è di importanza cruciale per capire il lavoro di ogni matematico a partire da Pitagora.

Una dimostrazione matematica deve iniziare con una serie di assiomi, asserzioni che possono essere assunte come vere o che sono palesemente vere. Quindi, argomentando logicamente, passo dopo passo, è possibile arrivare a una conclusione. Se gli assiomi sono corretti e l'argomentazione logica è impeccabile, allora la conclusione sarà inconfutabile. La conclusione è il teorema.

Le dimostrazioni matematiche si basano su questo procedimento logico e una volta provate restano vere fino alla fine dei tempi. Per apprezzarne meglio il valore, dobbiamo paragonarla alla loro parente povera, la prova scientifica. Nella scienza si avanza un'ipotesi per spiegare un fenomeno fisico. Se le osservazioni sul fenomeno si accordano con l'ipotesi, questi diviene un indizio a suo favore. Inoltre, l'ipotesi non dovrebbe soltanto descrivere un fenomeno noto, ma prevedere gli esiti di altri fenomeni. Si possono eseguire esperimenti per verificare il potere di previsione dell'ipotesi, e se essa si dimostra di nuovo efficace, allora si hanno ulteriori indicazioni a suo sostegno. Alla fine il peso degli indizi può essere schiacciante e l'ipotesi viene accolta come una teoria.... Questa debolezza della prova scientifica conduce alle rivoluzioni scientifiche in cui una teoria considerata corretta viene sostituita da un'altra teoria, che può essere soltanto una versione più raffinata della teoria originale, ma può esserne la negazione completa.

Dimostrazione diretta

Dobbiamo dimostrare l'implicazione logica

$$Hp. \Rightarrow Th.$$

Partendo dall'ipotesi Hp. si costruisce una catena di implicazioni fino a ricavare la tesi Th.

$$Hp. \Rightarrow a \quad a \Rightarrow b \quad b \Rightarrow c \dots \Rightarrow Th.$$

Ognuna delle implicazioni deve essere già stata dimostrata o deve essere un assioma della teoria. Lo schema di dimostrazione diretta utilizza sostanzialmente la regola di deduzione **Modus ponens**.

$$\begin{array}{l} (Hp. \Rightarrow Th.) \\ Hp. \\ \dots \\ \hline Th. \end{array}$$

Dimostrazione della contronominale

Dobbiamo dimostrare l'implicazione logica

$$Hp. \Rightarrow Th.$$

Sappiamo che essa è equivalente alla sua contronominale, cioè

$$\neg Th. \Rightarrow \neg Hp.$$

Allora si parte dalla tesi, e supponendo che essa sia falsa, si fa vedere che si giunge alla negazione dell'ipotesi.

Lo schema di dimostrazione utilizza sostanzialmente la regola di deduzione **Modus tollens**.

$$\begin{array}{l} (Hp. \Rightarrow Th.) \\ \neg Th. \\ \hline \neg Hp. \end{array}$$

Dimostrazione per assurdo

Dobbiamo dimostrare l'implicazione logica

$$Hp. \Rightarrow Th.$$

Si parte dalla tesi, e supponendo che essa sia falsa, si fa vedere che si giunge ad una conseguenza assurda (una contraddizione, in contrasto cioè con altri teoremi già dimostrati).

Lo schema utilizza sostanzialmente la regola di deduzione **Riduzione all'assurdo**.

$$\begin{array}{l} \neg Th. \rightarrow f \\ \hline Th. \end{array}$$

4 La Geometria del piano secondo Euclide

Il sistema assiomatico

Tu avrai già imparato a distinguere e a definire le principali figure del piano e dello spazio e a riconoscere le loro proprietà. Fare geometria adesso non significa cominciare da capo a studiare argomenti già noti, ma cercheremo di passare dallo studio della geometria dal punto di vista *intuitivo* allo studio della stessa secondo il *metodo razionale*.

Abbiamo visto che la geometria si occupa di studiare e misurare gli oggetti del mondo che ci circonda, fare geometria dal punto di vista razionale significa studiare le proprietà di figure ideali che sono delle pure e semplici astrazioni della mente. Di esse noi troviamo, nella realtà fisica, solo delle imitazioni grossolane e approssimate. Vedremo che le proprietà (forma ed estensione) di tali figure (geometriche) non vengono stabilite in base all'esperienza, ma solo in virtù di precisi ragionamenti che si basano soltanto sulle sue proprietà generali, così il ragionamento risulta valido tanto per quella

figura quanto per tutte le altre che godono delle stesse proprietà. E poi lo studio della geometria per via intuitiva comporta molti problemi:

- ciò che appare intuitivo per una persona può non esserlo per un'altra
- basarsi solo sull'esperienza comporta inevitabili errori di precisione nella misura delle dimensioni degli oggetti
- inoltre facendo leva solo sull'esperienza non otterremo mai risultati validi in generale. Anche se riuscissimo a verificare per mille triangoli che la somma dei loro angoli interni è uguale ad un angolo piatto, ci resterebbe sempre il dubbio che tale proprietà possa non sussistere per un ulteriore triangolo di forma diversa da quelli considerati.

Le definizioni

Cosa è il *vento*?

Dizionario: “il *vento* è un movimento di masse d'aria dovuto a diverso riscaldamento delle varie zone della Terra”

Cosa è un *quadrato*?

Testo di geometria: “un *quadrato* è un quadrilatero con i lati uguali e gli angoli uguali”

Questi sono due esempi di definizioni: *una definizione è una frase nella quale si spiega qual è la natura di un certo ente e si attribuisce ad esso un nome che lo contraddistingue.*

Notiamo subito che la definizione chiarisce qual è il significato dell'ente preso in esame utilizzando la conoscenza di altri enti.

Vedremo che non è possibile definire *tutti* i concetti che figurano in una data materia e in particolare vedremo che non si può dare la definizione di tutti i concetti geometrici.

Abbiamo visto prima che per spiegare cosa è un *quadrato* dobbiamo presupporre la conoscenza dei concetti di quadrilatero, lato, angolo e uguaglianza. Di conseguenza, prima di parlare del quadrato, dobbiamo precisare che «un *quadrilatero* è un poligono che ha quattro vertici», che «un suo *lato* è il segmento che ha per estremi due vertici consecutivi», ecc. Ma anche queste definizioni presuppongono la conoscenza di altri termini geometrici e così via secondo un procedimento «a ritroso». Un tale procedimento non può continuare all'infinito.

In altre parole, è necessario che di alcuni concetti, detti ***concetti o enti primitivi***, non venga data alcuna definizione. Essi costituiranno la base sulla quale costruire, poi, l'edificio di tutte le altre definizioni.

Esempio estraneo alla geometria.

Ammettiamo che capiti sulla Terra un essere intelligente di un altro pianeta, provvisto soltanto dell'udito e della parola, ma non degli altri sensi. Ebbene, noi potremo insegnare a questo essere la lingua italiana solo nel caso che esso conosca almeno alcune parole della nostra lingua. Infatti, mediante queste parole, potremo definirgliene altre; e con quelle che conosceva e con le nuove che ha appreso, potremo insegnargliene altre ancora. E così via, finché non conosca tutta la lingua italiana. Ma se questo ipotetico essere non conoscesse alcuna parola della nostra lingua, noi ci troveremmo nella assoluta *impossibilità* di iniziare la sua erudizione, non avendo alcun termine di riferimento per chiarirgli il significato del primo vocabolo da fargli imparare. Si osservi che non è necessario che il nostro viaggiatore interplanetario conosca *determinate* parole della lingua italiana. Basta che egli sappia il significato di *alcuni* vocaboli opportunamente scelti. Naturalmente, a seconda dei vocaboli che gli sono inizialmente noti, noi dovremo, poi, sviluppare in un modo o in un altro l'insegnamento della nostra lingua.

I **Concetti primitivi** saranno per noi: **punto, retta e piano.**

I Teoremi

Fraasi come queste:

“bucando un palloncino esso si sgonfia”

“riscaldando un corpo solido, questo si dilata”

“in un quadrilatero che è un rettangolo le diagonali sono uguali”

sono diverse da quelle viste nel caso delle definizioni e prendono il nome di PROPOSIZIONI.

Questa volta, dopo aver supposto che si verifichi una prima situazione si prende atto che di conseguenza, deve verificarsi anche una seconda situazione:

“se io pratico un foro nel mio palloncino, ne consegue che esso si sgonfia”

“se un corpo solido viene riscaldato, quel corpo si dilata”

“se accade che un quadrilatero abbia quattro angoli retti, allora accade pure che le sue diagonali sono uguali”.

Nei casi precedenti, il prodursi di un primo fatto *implica* il verificarsi di un secondo. La prima delle due situazioni considerate, quella che implica il verificarsi dell'altra è detta **ipotesi** e si indica anche con **Hp**, la seconda si dice **tesi** e si indica anche con **Th**.

	Hp		Th
“se	io pratico un foro nel mio palloncino	allora	esso si sgonfia”
“se	un corpo solido viene riscaldato	allora	quel corpo si dilata”
“se	un quadrilatero ha quattro angoli retti	allora	le sue diagonali sono uguali”.

Proposizioni come queste si chiamano *implicazioni logiche*.

Nelle implicazioni logiche di tipo matematico la dipendenza della tesi dalla relativa ipotesi non viene accettata perché la cosa è evidente o perché l'esperienza ripetuta ci prova che tale dipendenza effettivamente sussiste, ma in virtù di un preciso *ragionamento* che viene detto **dimostrazione**.

Consideriamo, ad esempio, l'implicazione logica “se un numero naturale è multiplo di 6, **allora** esso è un numero pari”.

La dimostrazione può essere la seguente:

“Se il numero naturale n è multiplo di 6, allora si ha: $n = 6 \cdot k$ (dove k è un altro numero naturale).

D'altra parte, possiamo anche scrivere: $n = (2 \cdot 3) \cdot k$ ovvero, per la proprietà associativa della moltiplicazione, $n = 2 \cdot (3 \cdot k)$. Da ciò si deduce che n è il doppio del numero naturale $3 \cdot k$, quindi è un numero pari.”

Una proposizione matematica che viene provata mediante un ragionamento si dice **teorema**. Ogni teorema consiste di un **enunciato** (*proposizione*) accompagnato dalla relativa **dimostrazione** (*ragionamento che lo prova*).

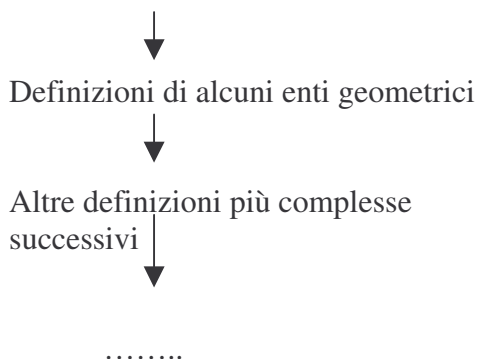
I postulati e gli assiomi

Abbiamo visto che per definire un ente geometrico occorre far riferimento ad altri enti precedentemente introdotti che, a loro volta, possono essere definiti solo facendo ricorso ad altri, di modo che, di concetto in concetto, si deve necessariamente risalire ai concetti primitivi.

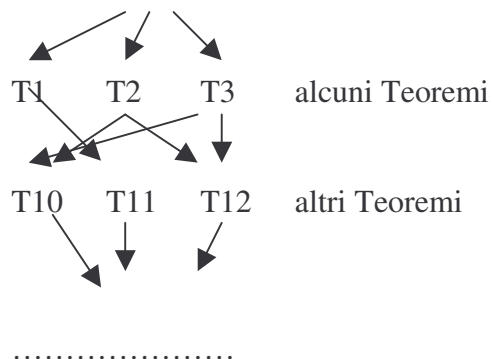
Nello stesso modo, per dimostrare una data proprietà ci si deve riferire ad altre proprietà precedentemente dimostrate che, a loro volta, dipendono da altre. In un tale ragionamento (detto *deduttivo*) si ripresenta un procedimento “a ritroso” che non può estendersi all'infinito, quindi è necessario che alcune proprietà iniziali vengano introdotte senza darne una dimostrazione. Tali proprietà vengono dette **postulati** se si tratta di geometria, **assiomi** per situazioni più generali.

I postulati esprimono quindi certe caratteristiche (indimostrabili perché evidenti) dei concetti primitivi (di tipo geometrico) di cui non abbiamo dato inizialmente la definizione, ma che a questo punto vengono implicitamente definiti dagli stessi postulati.

CONCETTI PRIMITIVI (punto, retta, piano)



POSTULATI



Una organizzazione di questo tipo **Euclide** la presenta per la geometria del piano nella sua opera “*Elementi*” e sono stati proprio i Greci ad insistere sul **ragionamento deduttivo** (ragionamento usato per la dimostrazione, basato su tale struttura gerarchica) come unico metodo di dimostrazione in matematica.

Esempio di teorema

Due angoli opposti al vertice sono uguali (congruenti).

Evidenziare l’Ipotesi e la Tesi e sviluppare la dimostrazione.

Se due angoli sono opposti al vertice **allora** sono uguali

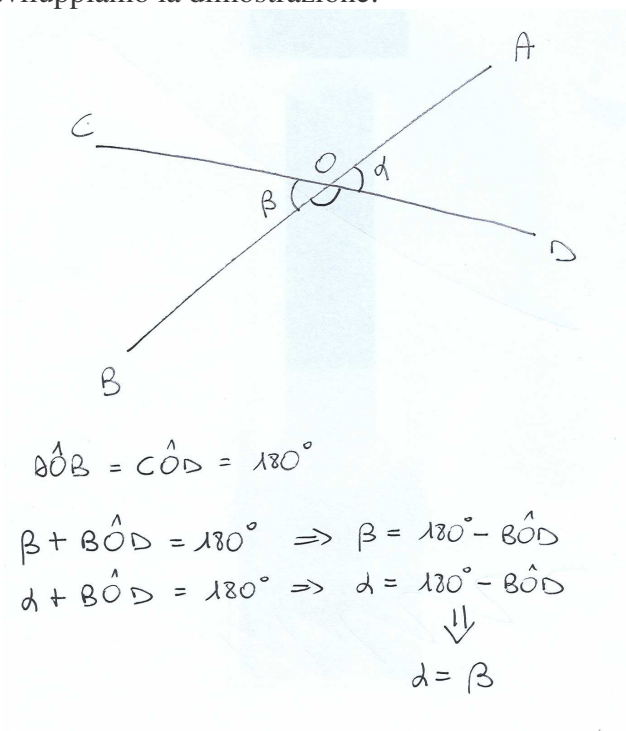
$Hp. \Rightarrow Th.$

con

Hp. due angoli opposti al vertice

Th. i due angoli sono uguali

Con l’aiuto di un disegno sviluppiamo la dimostrazione:



Concludiamo evidenziando i concetti fondamentali in questo schema:

GEOMETRIA INTUITIVA	GEOMETRIA RAZIONALE
<p>Parole chiave: misurare, calcolare concreto particolare esperimento, verifica su pochi casi</p>	<p>Parole chiave: pensare, ragionamento astrazione generalizzare deduzione, dimostrazione</p>
<p>Civiltà antiche Egiziani e Babilonesi (1700 a.C.) uso la geometria come pratico strumento per misurare e per costruire</p>	<p>Civiltà antiche Greci (600 a.C. – 300 a.C.) studio della geometria come ricerca di leggi generali e di giustificazioni di tutto ciò che veniva affermato</p>
<p>Svantaggi</p> <ul style="list-style-type: none"> □ le proprietà delle figure geometriche vengono stabilite solo in base all'esperienza, facendo verifiche su pochi casi presi in esame □ facendo leva solo sull'esperienza non si ottengono mai risultati validi in generale 	<p>Vantaggi</p> <ul style="list-style-type: none"> □ le proprietà delle figure geometriche vengono stabilite solo in virtù di precisi ragionamenti che si basano soltanto sulle sue proprietà generali, così il ragionamento risulta valido tanto per quella figura quanto per tutte le altre che godono delle stesse proprietà
<p>Strumenti Formule e problemi</p>	<p>Strumenti Gli “Elementi” di Euclide ed il Metodo assiomatico (concetti primitivi e definizioni, postulati e teoremi, deduzioni e dimostrazioni)</p>

5 *Gli “Elementi” di Euclide*

L'opera più importante di Euclide, gli “Elementi” contiene 13 libri.

Il libro I comincia con le definizioni dei concetti che saranno usati nella prima parte dell'opera:

DEFINIZIONE 1

Punto è ciò che non ha parti

DEFINIZIONE 2

Linea è lunghezza senza larghezza (la linea è una curva)

DEFINIZIONE 3

Estremi di una linea sono i punti

(una linea ha sempre lunghezza finita, quindi è il nostro segmento)

DEFINIZIONE 4

Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti

DEFINIZIONE 5

Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza

DEFINIZIONE 6

Estremi di una superficie sono linee

(una superficie è una figura limitata)

DEFINIZIONE 7

Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.

DEFINIZIONE 15

Cerchio è una figura piana limitata da un'unica linea tale che tutte le linee rette condotte su di essa da un punto fra quelli che giacciono all'interno della figura sono uguali fra loro.

DEFINIZIONE 16

E il punto viene detto centro del cerchio.

DEFINIZIONE 17

Diametro del cerchio è una retta tracciata per il centro e limitata in entrambe le direzioni dalla circonferenza del cerchio, e una tale retta biseca anche il cerchio.

DEFINIZIONE 23

Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano fra loro in nessuna di queste.

DEFINIZIONE 24

Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee che in un piano hanno un estremo in comune ma non sono per diritto

Euclide enuncia poi 5 postulati (verità applicabili solo alla geometria) e 5 assiomi (verità applicabili a tutte le scienze):

POSTULATO 1

Da qualsiasi punto si può condurre una retta a ogni altro punto.

POSTULATO 2

Si può prolungare una linea retta finita continuamente in linea retta.

POSTULATO 3

Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza. (raggio)

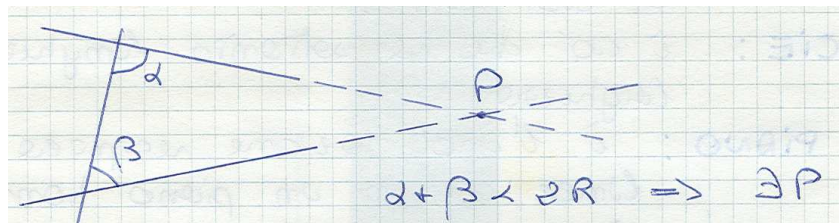
POSTULATO 4

Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

POSTULATO 5 o Postulato delle parallele

Se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due rette prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due angoli retti.

(dati in un piano una retta e un punto fuori di essa, esiste nel piano una sola retta per il punto e parallela alla retta data).



ASSIOMA 1

Le cose che sono uguali a una stessa cosa sono anche uguali fra loro.

ASSIOMA 2

Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme sono uguali.

ASSIOMA 3

Se da cose uguali si sottraggono cose uguali, i resti sono uguali.

ASSIOMA 4

Le cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.

ASSIOMA 5

Il tutto è maggiore della parte.

Geometria euclidea

La **geometria euclidea** è la geometria che si basa sui postulati di Euclide e in particolar modo sul postulato delle parallele, secondo il quale due rette parallele non si intersecano mai. Questa versione è quella di Moritz Pasch, più usata in epoca recente al posto della versione originale di Euclide, che è riportata sotto.

I cinque postulati

Di seguito si riportano i postulati di Euclide:

1. Tra due segni (punti) qualsiasi è possibile tirare una ed una sola retta
2. Si può prolungare una retta oltre i due segni indefinitamente
3. Dato un segno e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
4. Tutti gli angoli retti sono uguali
5. Se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

È soprattutto sulla violazione di quest'ultimo postulato che si fondano le geometrie non-euclidee come ad esempio la geometria della superficie di una sfera, o geometria riemanniana.

Versione assiomatizzata e corretta

Nel 1899 David Hilbert propone un sistema assiomatico corretto per la geometria.

Perché se ne sentiva la necessità?

Anzitutto, si cercava di dimostrare per assurdo la correttezza del quinto postulato, e poi perché nella versione originale sono impliciti alcuni altri assunti, ad esempio nel primo assioma è implicito che la retta esista e sia una sola, e che esistano due punti distinti, nella seconda che una retta posseda più di un punto, nel terzo che nel piano ci siano almeno tre punti non allineati, che si possa riportare un segmento di retta per traslazione senza deformato, e via di questo passo.

Venne così pubblicato *Grundlagen der Geometrie*, in cui veniva fornito un sistema assiomatico completo, fondato su 21 assiomi, per la geometria euclidea. Fatto questo, subito venne dimostrato da Henri Poincaré che la geometria iperbolica sviluppata da Giovanni Girolamo Saccheri e da Enrico Beltrami poteva essere messa in corrispondenza biunivoca con la geometria euclidea: l'eventuale autocontraddizione dell'una avrebbe causato la rovina anche dell'altra.

6 Geometria non euclidee

La lettura di questo paragrafo è sconsigliata a studenti del biennio.

Sono dette **Geometrie non euclidee** tutte le geometrie costruite negando o non accettando alcuni dei postulati di Euclide.

Il **V postulato di Euclide**, detto **postulato delle parallele** è il postulato che nel corso dei secoli ha suscitato il maggior interesse. La caratteristica che contraddistingue i postulati e gli assiomi della geometria di Euclide è l'essere asserzioni la cui verità è garantita dall'evidenza. L'evidenza è una caratteristica dei primi quattro postulati degli Elementi basta infatti usare riga e compasso; inoltre essi restano validi se ci si limita ad una porzione finita di piano.

Il Postulato delle parallele non è 'evidentemente vero', infatti non rimanda ad alcuna costruzione geometrica che possa limitarsi sempre ad una porzione finita di piano. Pare che lo stesso Euclide non fosse convinto dell'evidenza del postulato e questo è dimostrato dall'uso limitato che ne ha fatto nelle dimostrazioni dei teoremi della Sua geometria. Negli oltre duemila anni successivi alla diffusione degli Elementi di Euclide, molti sono stati i tentativi di dimostrare il V postulato o di riformularlo o, addirittura, di sostituirlo con altri equivalenti. Purtroppo tali tentativi sono tutti falliti, perché tutti i ragionamenti riconducevano sempre all'uso del V postulato.

Nei primi decenni del XIX secolo, il fallimento di tutti i tentativi effettuati aveva convinto i matematici dell'impossibilità di dimostrare il V postulato. È da questo momento che inizia a farsi strada l'idea di costruire altre geometrie che facciano a meno del V postulato. Nascono così i primi modelli di geometria non euclidea quali per esempio la **Geometria iperbolica** o la **Geometria ellittica**.

Storia delle geometrie non euclidee

I postulati di Euclide

Guardando i postulati che Euclide utilizzò nei suoi Elementi, si può facilmente intuire come mai il quinto postulato è stato fonte di dibattiti per duemila anni. I postulati sono infatti:

1. Tra due segni (punti) qualsiasi è possibile tirare una retta
2. Si può prolungare una retta oltre i due segni indefinitamente
3. Dato un segno e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
4. Tutti gli angoli retti sono uguali
5. Se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Si nota subito una differenza tra i primi quattro, che sembrano immediatamente evidenti, e il quinto, che non solo non sembra immediatamente vero, ma ha anche una formulazione molto più complicata degli altri. Lo stesso Euclide sembra essere a disagio, tanto che dimostra le prime 28 proposizioni del I libro degli Elementi senza farne uso.

Tuttavia, più familiare è senz'altro la forma moderna del postulato:

- Per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data

Mentre l'esistenza della parallela è assicurata dagli altri quattro postulati, l'unicità viene assunta assiomaticamente nella geometria euclidea.

Tentativi di dimostrazione del quinto postulato

Nei secoli, i tentativi di dimostrare il postulato sono numerosi: Proclo nel suo *Commento al Primo Libro degli Elementi di Euclide* ci riferisce delle "dimostrazioni" di Posidonio e Tolomeo, proponendone poi una sua. Altri tentativi furono compiuti dai matematici arabi, tra cui Nasir ad-Din at-Tusi che mette in relazione il quinto postulato con la somma degli angoli interni di un triangolo. In ognuno di questi tentativi di dimostrazione, e nei successivi, viene implicitamente dato per vero un assioma equivalente a quello delle parallele, rendendo vana la dimostrazione. Anche modificando la definizione di rette parallele non si approda a nulla: Euclide le definisce "due rette che non s'incontrano mai", per Posidonio, secondo Proclo, esse sono "due rette equidistanti, ossia in cui i punti

della seconda siano tutti alla stessa distanza dai corrispettivi della prima". Quest'ultima affermazione non dimostra nulla: non è detto che il luogo dei punti equidistanti da una retta sia una retta. Accettarlo in via di principio equivale ad assumere come valido il quinto postulato, e ci si ritrova da capo.

Dimostrazione per assurdo

Frustrati dagli insuccessi ottenuti cercando una dimostrazione diretta del postulato, gli studiosi provano ad assumere per validi i primi quattro postulati e creare delle geometrie alternative, sperando di arrivare ad una contraddizione. Questo avrebbe dimostrato che il quinto postulato deve necessariamente essere vero. Uno dei maggiori esponenti di questa scuola fu Giovanni Gerolamo Saccheri, che nel 1733 credendo di esservi riuscito, pubblica *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Anche se difettosa, e passata sotto silenzio, la dimostrazione per assurdo di Saccheri indicò la strada per la creazione di geometrie non-euclidee, nella speranza di portarle ad una contraddizione. Opera questa in cui si impegnarono molti uomini di scienza tra il XVIII e il XIX secolo. Pochi però erano matematici di rilievo: Gauss, che non pubblicò mai nulla sull'argomento per timore delle *strida dei beoti*, Lagrange e Legendre costituiscono delle fulgide eccezioni. In effetti, Roberto Bonola, nel suo volume *La geometria non euclidea*, pubblicato da Zanichelli nel 1906, si trovò a dover inserire nei capitoli storici molti "dilettanti" tra i fondatori della geometria non euclidea: Janos Bolyai era un militare, Ferdinando Schweikart era un avvocato, e via di questo passo. Bolyai, inoltre, era figlio di un amico di Gauss, Farkas: dopo aver ricevuto l'opera di Janos nel gennaio 1832, Gauss scrisse a Farkas dicendo:

Se inizio dicendo che non posso lodare quest'opera, tu resterai meravigliato per un istante. Ma non posso fare altrimenti, lodarlo sarebbe infatti lodare me stesso; tutto il contenuto dell'opera spianata da tuo figlio coincide quasi interamente con quanto occupa le mie meditazioni da trentacinque anni a questa parte [...] È dunque con gradevole sorpresa che mi viene risparmiata questa fatica [di pubblicare], e sono contento che il figlio di un vecchio amico mi abbia preceduto in modo così notevole.

È di rilievo notare che i risultati della geometria "astrale", come Gauss chiamava la geometria iperbolica, erano in stridente contrasto con la filosofia kantiana, in quanto questa assumeva come giudizio sintetico *a priori* la geometria euclidea.

Bernhard Riemann

Anche se aveva tenuto per sé i risultati più "rivoluzionari", il saggio *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato da Gauss nel 1828 segnò una svolta nell'indagine delle geometrie alternative. L'attenzione viene rivolta alle proprietà intrinseche delle superfici, a prescindere dallo spazio in cui sono immerse: questo metodo d'indagine viene esteso da Bernhard Riemann nel suo scritto *Sulle ipotesi che sono di fondamento della Geometria* del 1854 che venne pubblicato postumo nel 1867. Riemann getta le basi di una geometria totalmente nuova, detta geometria riemanniana, in cui il problema delle parallele non si pone nemmeno, sostituendo il concetto di retta con quello metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza tra due punti. Si possono così costruire geometrie a curvatura costante, oppure che varia in ogni punto, in qualunque numero di dimensioni, ognuna corrispondente ad una superficie, detta varietà riemanniana n-dimensionale. In quest'ottica, la geometria euclidea è la geometria naturale del piano. La geometria riemanniana è quella sferica, a curvatura costante positiva, dove le geodetiche, non sono mai parallele, essendo in una sfera archi di cerchio massimo ed hanno quindi sempre in comune due punti, i poli.

Eugenio Beltrami

A partire dai risultati di Riemann, Eugenio Beltrami dimostra la consistenza della nuova geometria e costruisce un modello in carta di una superficie a curvatura costante negativa, la pseudosfera iperbolica. Per comprendere la marginalità dell'argomento all'epoca, basti ricordare che un giornale dell'epoca definì il modello in carta *la Cuffia della Nonna*, nome che tutt'ora ritorna nella descrizione

del modello all'Università di Pavia, dove è conservato, ossia *Cuffia di Beltrami*. A questo riguardo Beltrami scrisse a Houel il 19 dicembre 1869:

Mi sembra che questa dottrina non abbia trovato in linea generale la sua completa "comprensione" a tal punto che nessuno ha ancora osservato questo fatto di importanza capitale, e cioè ch'essa è completamente indipendente dal postulato di Euclide.

Nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* del 1867 Beltrami costruì il primo modello di geometria iperbolica. Particolare di rilievo è che Beltrami scrisse il saggio senza essere a conoscenza dei risultati di Riemann, fatto che lo indusse a lasciarlo da parte per leggere l'*Habilitationsvortrag* di Riemann di cui sopra, prima di darlo alle stampe.

Henri Poincaré

Modello del Piano Iperbolico con semipiano



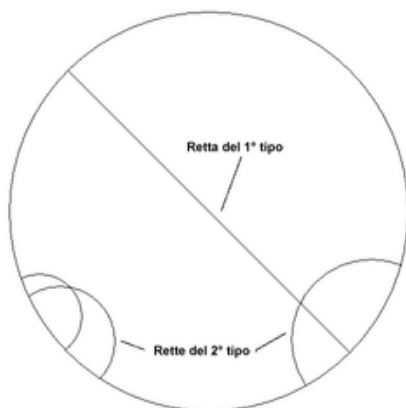
Il modello di Beltrami aveva il difetto di essere valido solo localmente, come provò David Hilbert nel 1901, e quindi dopo la morte di Beltrami, tuttavia il modello di Henri Poincaré dimostrò che non sarebbe stato possibile dimostrare per assurdo la validità del postulato mediante l'autocontraddizione delle nuove geometrie, in quanto queste erano equivalenti a quella euclidea. Per fare questo, egli fornì un modello euclideo delle geometrie non euclidee, "traducendo" gli oggetti euclidei in equivalenti non-euclidei, per cui continuano a valere i teoremi euclidei.

Ad esempio, prendiamo un semipiano delimitato da una retta r (orizzonte): definiamo *rette*

1. le rette perpendicolari ad r
2. le semicirconfereze con centro su r

È facile vedere che continuano a valere i primi quattro postulati di Euclide, ma non il quinto: per un punto passano infinite rette parallele ad una retta data. Infatti, considerando la retta perpendicolare più a sinistra, le due semicirconfereze non la intersecano, e sono dunque parallele alla retta. Esse hanno un punto in comune, e per quel punto è facile costruire infinite semicirconfereze che non intersecano la retta. Per inciso, anche l'altra retta è parallela alla prima, in senso più classico.

Modello del Piano Iperbolico con circonferenza



Una più complessa rappresentazione del piano iperbolico è un cerchio, in cui le rette del primo tipo sono archi di circonferenza con centro esterno al piano iperbolico e perpendicolari al bordo del piano iperbolico, mentre quelle del secondo tipo sono i diametri del piano iperbolico. In questo caso i due archi a sinistra sono paralleli al diametro e all'arco a destra. Questi ultimi due non sono paralleli tra loro.

7 *Compendio di Geometria piana*

Per **geometria piana** si intende quel ramo della geometria orientato, appunto, al piano.

Definizioni

- ❑ Il piano è determinato da due dimensioni denominate x e y .
- ❑ L'unità fondamentale è il punto geometrico che non ha dimensione.
- ❑ Si definiscono:
 - "semiretta" quella porzione di retta che ha un solo punto di origine
 - "segmento" un tratto di retta delimitato da due punti
 - "Parallele" sono le rette che non si intersecano, giacendo sullo stesso piano
 - Sono "sghembe" le rette che, con orientamenti diversi, giacciono su piani diversi (non sono parallele e non si intersecano).

Dal punto di vista etimologico (significato della parola) Geometria significa misurazione. Ciò vuol dire che nell'ambito geometrico in particolare si calcolano le misure.

Proprietà

- ❑ Per un punto possono passare infinite rette.
- ❑ Per ogni retta possono esistere infinite parallele.

Il piano " x " " y " è convenzionalmente così definito per permettere, a coloro che devono trattare quanto la geometria stabilisce, di comprendersi nel dare orientamento alle figure.

Le unità di misura utilizzate per procedere nei calcoli necessari, devono essere stabilite e rispettate.

La geometria, pertanto, a mezzo di leggi e di formule, permette all'uomo di progettare e misurare.

Sul piano possono essere tracciate le più disparate forme geometriche (figure) delle quali però, a mezzo di formule, si possono conoscere esattamente le ampiezze, denominate aree o superfici.

Le figure geometriche sono delimitate da segmenti (lati) che, in base alla presenza o no di parallelismo e di inclinazione tra di loro, conferiscono alle stesse figure forme diverse e conseguenti nomi diversi.

Principali figure geometriche

Nella geometria piana sono presenti diverse figure, identificate in base agli angoli e ai lati.

- Il **quadrato** (4 lati uguali formanti tra loro angoli retti)
- Il **rettangolo** (4 lati, uguali a due a due, formanti angoli retti)
- Il **triangolo** (tre lati, formanti angoli dai valori più disparati); può essere denominato, in base alla lunghezza dei lati: equilatero (tre lati uguali), isoscele (due lati uguali) e scaleno (tre lati diversi)
- Il **rombo** (4 lati uguali formanti angoli diversi, a due a due)
- Il **romboide** (4 lati, uguali a due a due, formanti angoli uguali a due a due)
- Il **trapezio** (4 lati, 2 di misure diverse, paralleli, e 2 inclinati che congiungono i primi due; i due lati paralleli sono chiamati basi (minore e maggiore):
 - L'altezza del trapezio è data dalla distanza, tra loro, dei due lati paralleli; può essere rettangolo, quando a congiungere i 2 lati diversi e paralleli vi siano un lato inclinato ed uno verticale;

- isoscele quando i due lati inclinati hanno la stessa lunghezza;
- scaleno quando i due lati inclinati hanno lunghezze diverse).

In base al numero dei lati, le figure geometriche assumono nomi specifici (vengono detti **poligoni regolari** quelle figure aventi qualsiasi numero di lati ma tutti della stessa misura ed equidistanti da un punto detto centro: pentagono, esagono, eptagono, ottagonone, ennagono, decagono ecc. - sono sempre inscrittibili in una circonferenza; se non sussiste questa possibilità i poligoni sono detti irregolari).

Il **cerchio**, composto da un segmento (circonferenza) che ha gli estremi a contatto e ogni punto di questo equidistante da un punto comune chiamato centro (ogni segmento che unisce il centro ad un qualsiasi punto della circonferenza è chiamato "raggio"; il segmento che unisce due punti della circonferenza, passando per il centro, è chiamato "diametro", pari perciò al doppio del raggio; il segmento che unisce due punti della circonferenza, senza passare per il centro è chiamato "corda"; il diametro è, pertanto, la corda massima).

Superfici delle figure geometriche

Ogni figura geometrica delimita una porzione (superficie) del piano sul quale insiste, sia esso un terreno o un foglio da disegno o quant'altro possa essere utilizzato per rappresentarvi porzioni necessarie a qualsivoglia destinazione. Le superfici (o aree) sono quantificate in X^2 , dove X rappresenta l'unità di misura.

I parametri necessari per il calcolo delle aree delle figure piane sono le lunghezza dei lati, della base, dell'altezza, dell'apotema etc.

La base di una figura piana si indica generalmente con la lettera B , l'altezza con la lettera H , il lato con la lettera L e questi sono i simboli che, nelle formule, si riferiscono ai valori da utilizzare, quando sono noti. L'area è indicata dalla lettera A .

Formule per il calcolo delle aree delle principali figure piane

- Quadrato: $A = L^2$
- Rettangolo: $A = B \times H$
- Triangolo: $A = \frac{B \times H}{2}$
- Trapezio: $A = \frac{(B + b) \times H}{2}$ (dove b rappresenta la base minore)
- Rombo: $A = B \times H$
- Poligono regolare: $A = \frac{P \times a}{2}$ (dove P è il perimetro e a l'apotema)
- Cerchio: $A = r^2 \times \pi$ (dove r è il raggio)